Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi **Admitere - studii de licenţă**

Facultatea de Informatică **Sesiunea Iulie 2026**

Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă **10 puncte** din oficiu.
- Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.
- Observaţii privind SUBIECTUL I:
  - În cazul în care la o întrebare pe foaia de examen sunt mai multe răspunsuri (exemplu: "A.", "B."), niciunul dintre ele nu se punctează.
  - În cazul în care la o întrebare răspunsul nu este clar (exemplu: se scrie un caracter similar şi cu "B." şi cu "D."), răspunsul nu se punctează.
  - În cazul în care la o întrebare răspunsul final nu este corect dar există justificări parţial corecte, punctajul se calculează conform baremului afişat.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Răspuns corect: **C.**	**5p**
	$(1+i)^8 = (2i)^4 = 16$ iar $(\sqrt{3}-i)^3 = 3\sqrt{3}+i-9i-3\sqrt{3} = -8i$.	**2p**
	Deci $\dfrac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^3} = \dfrac{16}{-8i} = \dfrac{-2}{i} = 2i$. Deci, partea reală este 0.	**2p**
2.	Răspuns corect: **C**.	**5p**
	$E = \dfrac{\log_5 125}{\log_5 27} - \dfrac{\log_5 25}{\log_5 45} = \dfrac{\log_5 5^3}{\log_5 3^3} - \dfrac{\log_5 5^2}{\log_5 (3^2 \cdot 5)} = \dfrac{3\log_5 5}{3\log_5 3} - \dfrac{2\log_5 5}{2\log_5 3 + \log_5 5}$.	**3p**
	$E = \dfrac{3}{3a} - \dfrac{2}{2a+1} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{2a+1}$.	**1p**
3.	Răspuns corect: **B**.	**5p**
	$g(x+1) = f(x+1) - (x+1)^2 = f(x) + 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = f(x) - x^2 = g(x)$.	**4p**
4.	Răspuns corect: **C.**	**5p**
	Scrierea condiției de paritate: $f(-x) = f(x), \forall x \in A$.	**1p**
	Pentru $f(0)$ avem 3 alegeri.	**1p**
	Pentru $f(1) = f(-1)$ avem 3 alegeri.	**1p**
	Determinarea numărului funcţiilor pare.	**1p**
5.	Răspuns corect: **A.**	**5p**
	Se poate observa că $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{j} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$.	**1p**
	Astfel, avem $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{16+9} = 5$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{16+9} = 5$, iar $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = 6$.	**3p**
6.	Răspuns corect: **B.**	**5p**
	$\dfrac{1}{2^2} + 1 = (\sin a + \cos b)^2 + (\sin b + \cos a)^2 = 2(\sin a \cos b + \sin b \cos a) + 2$.	**3p**
	$2\sin(a+b) = 2(\sin a \cos b + \sin b \cos a) = \dfrac{5}{4} - 2$.	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Verificarea relaţiei $A(t)^T \cdot A(t) = I_2$.	**2p**
	Aşadar, $A(t)$ este inversabilă, iar $A(t) = A(t)^{-1}$ este acelaşi lucru cu $A(t) = A(t)^T$.	**1p**
	Acest lucru revine la $\sin t = -\sin t$, adică $\sin t = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii în $\mathbb{R}$ sunt $t = k\pi$, cu $k \in \mathbb{N}$.	**2p**
1.b)	Se observă uşor că $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & -y_{n+1} \\ y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix}$.	**1p**
	Din proprietatea de multiplicativitate a determinanţilor, avem $\det A \cdot (x_n^2 + y_n^2) = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2$.	**2p**
	Cum $\det A = 1$, rezultă prima egalitate din cerinţă. Cea de-a doua egalitate se arată imediat prin inducţie după n, folosind faptul că $x_0^2 + y_0^2 = 1$.	**2p**
1.c)	Folosind proprietăţile funcţiilor trigonometrice, se arată prin inducţie că $A(t)^n = A(nt), \forall n \in \mathbb{N}^*$.	**2p**
	Dar $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A(t)^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, deci $x_n = \cos(nt)$.	**2p**
	Prin urmare, $x_{2026} = \cos(2026 \cdot \pi/3) = \cos(675\pi + \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$.	**1p**
2.a)	$P(-1) = 2 - 3 + 4 - 1 - 2 = 0$.	**5p**
2.b)	Din teorema împărţirii cu rest avem că există $Q, R \in \mathbb{R}[X]$, cu $grad(R) < 3$, astfel încât $P = H \cdot Q + R$.(*)	**1p**
	Fie $R = aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Cum polinomul H are rădăcinile $-1, 0, 1$, din (*) deducem că: $P(-1) = R(-1)$, $P(0) = R(0)$ şi $P(1) = R(1)$.	**1p**
	Astfel, avem următoarele relaţii: $a - b + c = 0$; $c = -2$; $a + b + c = 8$, de unde obţinem $a = 6$, $b = 4$, $c = -2$.	**2p**
	Prin urmare, restul împărţirii lui P la H este $R = 6X^2 + 4X - 2$.	**1p**
2.c)	Derivând relaţia (*) avem $P'(X) = H'(X) \cdot Q(X) + H(X) \cdot Q'(X) + R'(X)$.	
	Pentru $X = 1$ avem $P'(1) = H'(1) \cdot Q(1) + R'(1)$, deoarece $H(1) = 0$.	**2p**
	Pe de altă parte $P'(1) = 2(2n + 2) + 3(2n - 1) + 8 + 1 = 10n + 10$, $H'(1) = 2$ iar $R'(1) = 12 + 4 = 16$.	**2p**
	Deci suma coeficienţilor polinomului cât, Q, este $Q(1) = \frac{1}{2}(10n - 6) = 5n - 3$.	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$.	**4p**
	Astfel, graficul funcţiei f are dreapta $y=1$ ca asimptotă orizontală spre $+\infty$.	**1p**
1.b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}-1\right)^{\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)^{-1}\cdot x^2\cdot\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1\right)}$.	**2p**
	$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{2}$, deci limita căutată este $\sqrt{e}$.	**3p**
1.c)	Prin inducţie, se demonstrează că $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{nx^2+1}},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.	**2p**
	Rezultă că $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.	**1p**
	Deci $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k-a_{k+1}}{a_k\cdot a_{k+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_k}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_1}\right)=\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}}$.	**1p**
	Limita căutată este aşadar 1.	**1p**
2.a)	Integrare prin părţi: $I_1=\displaystyle\int_0^1 te^{-t}dt=-te^{-t}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-t}dt=-\dfrac{1}{e}-e^{-t}\Big|_0^1=1-\dfrac{2}{e}$.	**5p**
2.b)	Se poate observa că $t^n\geqslant t^{n+1},\ \forall t\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.	**2p**
	Cum pentru orice $t\in[0,1]$ avem $e^{-t}>0$, rezultă că $t^ne^{-t}\geq t^{n+1}e^{-t}$.	**2p**
	Integrând de la 0 la 1 obţinem că $I_{n+1}\geqslant I_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.	**1p**
2.c)	$I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}e^{-t}dt=\int_0^1 t^{n+1}(-e^{-t})'dt=-t^{n+1}e^{-t}\Big|_0^1+(n+1)\int_0^1 t^ne^{-t}dt$.	**4p**
	$I_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$.	**1p**