

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

Pentru itemii de mai jos, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 5p 1. Valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care numărul complex $(1 + ia)^3$ are partea reală egală cu zero sunt:
 A. $a \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$; B. $a \in \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right\}$; C. $a \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; D. $a = 3$.
- 5p 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolelor de ecuații $y = x^2 + 2x - 1$, $y = 2x^2 + 4x - 3$ și $y = -x^2 - 2mx$ să fie coliniare.
 A. $m = 0$; B. $m \in \{-2, 1\}$; C. $m = -2$; D. $m = 1$.
- 5p 3. Suma numerelor naturale n care satisfac inegalitatea $C_n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right) < 15$ este:
 A. 15; B. 10; C. 21; D. 6.
- 5p 4. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale este:
 A. $\frac{9}{100}$; B. $\frac{81}{100}$; C. $\frac{18}{100}$; D. $\frac{27}{100}$.
- 5p 5. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = 4m\vec{i} + (m - 1)\vec{j}$ și $\vec{v} = 2m\vec{i} + (m + 1)\vec{j}$ sunt perpendiculari și satisfac $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
 A. $m = 0$; B. $m = \frac{1}{3}$; C. $m = -\frac{1}{3}$; D. $m \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$.
- 5p 6. Valoarea expresiei $\sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$ este:
 A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$; B. $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$; C. $-\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$; D. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și fie mulțimea $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$.

- 5p a) Calculați matricea $A^3 + 2I_3$.
- 5p b) Dacă matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ verifică relația $AX = XA$, demonstrați că $X \in \mathcal{G}$.
- 5p c) Arătați că ecuația $X^2 = A$ nu are soluții în mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, definit prin $f = X^4 - X^3 - (1 + \alpha)X^2 + X + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 , și x_4 .
- 5p a) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.
- 5p b) Să se determine polinomul $g \in \mathbb{R}[X]$ de grad 4, pentru care $g(0) = 1$ și care are ca rădăcini inversele rădăcinilor polinomului f .
- 5p c) Știind că x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt numere întregi, să se arate că numărul α se poate scrie ca produs de două numere naturale consecutive.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4}$.

5p a) Determinați ecuația dreptei tangente la graficul lui f în punctul de abscisă $x = 0$.

5p b) Arătați că funcția f este concavă.

5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - f' \left(\frac{1}{n^2} \right) - f' \left(\frac{2}{n^2} \right) - \dots - f' \left(\frac{n}{n^2} \right) \right)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p a) Calculați I_0 .

5p b) Demonstrați că are loc $(2n+1)I_n + 2nI_{n-1} = 2\sqrt{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right) \right] = e^{2(\sqrt{2}-1)}$.

Indicație: Puteți utiliza, eventual, inegalitățile $x \geq \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}, \forall x \in [0, 1]$.