Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi **Admitere - studii de licenţă**

Facultatea de Informatică **Sesiunea iulie 2019**

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine $x \in \mathbb{R}$, ştiind că numerele $x-1, 2x+1, 5x-1$ formează, în această ordine, o progresie aritmetică.

5p **2.** Să se arate că funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$ este funcţie impară.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_{x-1}(x^2-x-4)=2$.

5p **4.** Să se determine termenul care îl conţine pe $\frac{1}{x}$ din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}\right)^{200}, x\in\mathbb{R}_+^*$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3), B(-3,1)$ şi $C(2,-1)$. Determinaţi coordonatele punctului D, astfel încât A,B,C,D să fie, în această ordine, vârfurile unui paralelogram.

5p **6.** Ştiind că $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}, \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{(2\mathrm{k}+1)\pi \mid \mathrm{k}\in\mathbb{Z}\}$, să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}^*$ şi matricea $M=\begin{pmatrix} x & x-y & x-y \\ 0 & y & y-z \\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det M$.

5p b) Să se arate că $\det(M^*)=(\det M)^2$, unde M^* reprezintă adjuncta matricei M.

5p c) Să se calculeze M^{2019}.

2. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $P=3X^3+mX^2-3X+6,\ Q=X^3+6X^2-9X+9m$.

5p a) Să se afle partea întreagă a lui m, ştiind că polinoamele P şi Q au acelaşi rest la împărţirea cu $X+2$.

5p b) Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{Q}$ polinomul $P-3Q$ are o singură rădăcină reală?

5p c) Să se găsească acele valori ale lui $m\in\mathbb{R}$ cunoscând că rădăcinile x_1,x_2,x_3 ale lui P şi y_1,y_2,y_3 ale lui Q sunt toate reale şi verifică relaţia:

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2).$$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, dată prin $f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n), \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p a) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p b) Arătaţi că $a_n=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{n^2}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}},\ I_n=\int_0^1\frac{nx+1}{x^2e^{nx}+e^{-nx}}dx$.

5p a) Să se calculeze I_0.

5p b) Arătaţi că $I_n<I_{n+1}<\frac{\pi}{2}, \forall n\in\mathbb{N}$.

5p c) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi să i se afle limita.