

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați părțile imaginară și reală ale numărului complex $z = (2 + i\sqrt{2})^2 + (2 - i\sqrt{2})^2$.
- 5p 2. Pentru ce valori ale parametrului real m vârful parabolei de ecuație $y = x^2 - 4x + m$ se găsește pe dreapta de ecuație $y = x + 1$?
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x + 2) + 1 = \log_2(x^2 - 4)$.
- 5p 4. Se alege la întâmplare un număr natural, impar, mai mic sau egal cu 30. Care este probabilitatea ca numărul ales să fie pătrat perfect?
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$ și $B(3, 1)$. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin originea axelor și este paralelă cu dreapta care trece prin punctele A și B .
- 5p 6. Rezolvați ecuația $\sin x + \cos 2x = 1$ în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Fie $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$ și "." operația uzuală de înmulțire a matricilor.
- 5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $M(a)$ să nu fie inversabilă.
- 5p b) Să se arate că $M(a) \cdot M(b) = M(a + b - 2ab)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel ca $M^2(x) = I_3$, unde I_3 este matricea unitate din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$.
- 5p a) Ce relație există între a, b și c dacă restul împărțirii lui f la $(X - 1)$ este 4?
- 5p b) Determinați a, b și c , știind că $a + b + c = 1$ și că i este o rădăcină a lui f (unde $i^2 = -1$).
- 5p c) Pentru valorile lui a, b și c găsite mai sus, să se determine toate rădăcinile lui f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin
- $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \in (-1, 0) \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}.$$
- 5p a) Studiați continuitatea funcției f pe întreg domeniul ei de definiție.
- 5p b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
- 5p c) Arătați că $f(x) \leq 1, \forall x \in (-1, +\infty)$.
2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x^2 + 1} dx$.
- 5p a) Să se calculeze I_2 .
- 5p b) Arătați că $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Studiați monotonia, mărginirea și convergența șirului $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.