

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Calculați partea imaginară a numărului complex $\left[\frac{1}{(1+i\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(1-i\sqrt{2})^2} \right] (i^2 = -1)$.
5p	2. Pentru ce valori ale parametrilor reali m și n dreapta de ecuație $y = mx + n$ este tangentă la parabola de ecuație $y = x^2 + (m+n)x - m$ în punctul său de minim?
5p	3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \log_2(x-1) = 0$.
5p	4. Se alege la întâmplare un număr x din mulțimea $\{1, 2, \dots, 100\}$. Care este probabilitatea ca $\log_2 x$ să fie un număr rațional?
5p	5. Se consideră punctele $A(3, 2)$ și $B(1, 0)$. Determinați coordonatele punctelor C situate pe dreapta $d: x + y = 5$ pentru care aria triunghiului ABC este 4.
5p	6. Pentru $x \in (0, \pi)$, determinați $\cos 3x$, știind că $\cos 2x = \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

5p	1. Fie $G = \left\{ A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & iy \\ 0 & 0 & 0 \\ iy & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$, unde $i^2 = -1$.
5p	a) Demonstrați că $(G, \circ)$ este grup comutativ ("o" notează înmulțirea matricilor).
5p	b) Fie funcția $\varphi: (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (G, \circ)$ definită prin $\varphi(x + iy) = A(x, -y)$, pentru orice $x + iy \in \mathbb{C}^*$. Arătați că φ este izomorfism de grupuri.
5p	c) Calculați $A(0, -1)^{2017}$.
5p	2. Fie polinomul $f = X^3 + pX^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$.
5p	a) Pentru ce valori ale lui $p \in \mathbb{Z}_3$, f se divide prin $X - \hat{2}$?
5p	b) Determinați valoarea expresiei $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f .
5p	c) Pentru $p = \hat{1}$, descompuneți f în factori ireductibili.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

5p	1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ și $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $g(x) = \frac{f(x)}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
5p	a) Demonstrați că $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
5p	b) Arătați că g este crescătoare pe tot domeniul de definiție.
5p	c) Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = 2$ și $x_{n+1} = e^{x_n^2} - x_n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Studiați monotonia și determinați limita acestuia.
5p	2. Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \sin^2 x$ și $g(x) = 2x \cos^2 x$.
5p	a) Aflați câte o primitivă a funcțiilor f și g .
5p	b) Calculați $I_n + J_n$, unde $I_n = \int_0^{1/n} f(x) dx$ și $J_n = \int_0^{1/n} g(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
5p	c) Determinați $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(J_n - I_n)$.