

Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.
- Observații privind SUBIECTUL I:
 - În cazul în care la o întrebare pe foaia de examen sunt mai multe răspunsuri (exemplu: "A.", "B."), niciunul dintre ele nu se punctează.
 - În cazul în care la o întrebare răspunsul nu este clar (exemplu: se scrie un caracter similar și cu "B." și cu "D."), răspunsul nu se punctează.
 - În cazul în care la o întrebare răspunsul final nu este corect dar există justificări parțial corecte, punctajul se calculează conform baremului afișat.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Răspuns corect: C. Fie $a \in \mathbb{R}$. Atunci $(1 + ia)^3 = 1 - 3a^2 + i(3a - a^3)$. $\operatorname{Re}(1 + ia)^3 = 0 \Rightarrow 1 - 3a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.	5p 2p 2p
2.	Răspuns corect: D. Vârful parabolei $y = x^2 + 2x - 1$ este $V_1(-1, -2)$; vârful parabolei $y = 2x^2 + 4x - 3$ este $V_2(-1, -5)$; vârful parabolei $y = -x^2 - 2mx$ este $V_3(-m, m^2)$. Cele trei puncte sunt coliniare dacă $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \\ -m & m^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(1 - m) = 0$.	5p 3p 1p
3.	Răspuns corect: A. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci avem $C_n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right) < 15 \Leftrightarrow \frac{(n-1)(2+n)}{2} < 15 \Leftrightarrow n(n+1) < 32$. Cel mai mare $n \in \mathbb{N}^*$ care satisface inegalitatea $n(n+1) < 32$ este $n = 5$. Deci suma valorilor n care satisfac relația din enunț este $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Notă: Se consideră că $C_1^2 = 0$. Dar, cei care au considerat că această valoare nu este definită și au impus restricția $n \geq 2$, pentru care răspunsul este 14, vor primi punctajul complet.	5p 2p 2p
4.	Răspuns corect: D. Cu $a \neq b$ sunt $9 \cdot 9$ numere de forma $\overline{aab}$, $9 \cdot 9$ numere de forma $\overline{aba}$, și $9 \cdot 9$ numere de forma $\overline{baa}$. Prin urmare $p = \frac{\text{nr. caz. fav.}}{\text{nr. caz. pos.}} = \frac{3 \cdot 81}{900} = \frac{27}{100}$.	5p 2p 2p
5.	Răspuns corect: B. Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt perpendiculari dacă $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 1 = 0$. Adică $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ dacă $m = \pm \frac{1}{3}$. (1) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow 16m^2 + m^2 - 2m + 1 = 4m^2 + m^2 + 2m + 1 \Leftrightarrow 4m(3m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ sau $m = \frac{1}{3}$. (2) Din (1) și (2), rezultă că $m = \frac{1}{3}$.	5p 2p 2p
6.	Răspuns corect: B. Folosind formula $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$, avem $\sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}(\sin \frac{4\pi}{3} + 1)$. Cum $\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, obținem că $\sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.	5p 3p 1p

1.a)	Calcul $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Prin calcul se deduce că $A^3 = O_3$. Așadar, $A^3 + 2I_3 = 2I_3$.	2p 2p 1p
1.b)	Fie $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Calcul AX, XA. Cum $AX = XA$, avem că $x_{21} = x_{31} = x_{32} = 0$ și $x_{11} = x_{22} = x_{33}, x_{12} = x_{23}$. Deci $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix}$, $x_{11}, x_{12}, x_{13} \in \mathbb{C}$, adică $X \in \mathcal{G}$.	2p 3p
1.c)	Presupunem că există $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $X^2 = A$. Putem observa că X verifică $AX = XA = X^3$. Din punctul b) avem că $X \in \mathcal{G}$, adică există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Din $X^2 = A$, rezultă că $\det(X^2) = 0$, deci $\det(X) = 0$, adică $a = 0$. Așadar $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A$. Deci ecuația nu are soluții în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.	2p 3p
2.a)	Împărțind polinomul f la $X^2 - 1$, obținem $f = (X^2 - 1)(X^2 - X - \alpha)$. Deci restul împărțirii este 0.	5p
2.b)	Fie $g \in \mathbb{R}[X]$, $g = a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + 1$, cu rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$. Cum f se divide la $X^2 - 1$, rezultă că ± 1 sunt rădăcini ale polinomului f. Putem presupune că $x_1 = -1, x_2 = 1$, iar x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului $X^2 - X - \alpha$. Așadar, g se poate scrie în forma $g = c(X - 1)(X + 1)\left(X - \frac{1}{x_3}\right)\left(X - \frac{1}{x_4}\right)$, $c \in \mathbb{R}^*$. Din relațiile lui Viète avem $x_3 + x_4 = 1, x_3 x_4 = -\alpha$ (*) $\Rightarrow \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = -\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{x_3 x_4} = -\frac{1}{\alpha}$. Prin urmare, avem că $g = c(X^2 - 1)\left(X^2 + \frac{1}{\alpha}X - \frac{1}{\alpha}\right)$. Știind că $g(0) = 1$, avem $c = \alpha$. Deci $g = \alpha(X^2 - 1)\left(X^2 + \frac{1}{\alpha}X - \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha X^4 + X^3 - (1 + \alpha)X^2 - X + 1$.	2p 2p 1p
2.c)	Cum $f = (X^2 - 1)(X^2 - X - \alpha)$ avem $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3$ și x_4 sunt soluții întregi ale ecuației $X^2 - X - \alpha = 0$. Din relațiile lui Viète (*) putem scrie $\alpha = -x_3 x_4 = (x_3 - 1)x_3 = (-x_3)(-x_3 + 1)$. Pentru $x_3 > 0, \alpha = (x_3 - 1)x_3$, iar pentru $x_3 < 0, \alpha = (-x_3)(-x_3 + 1)$.	3p 2p

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}, \forall x \in \mathbb{R}.$ Ecuția tangentei la f într-un punct x_0 este $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Deci ecuația tangentei la graficul lui f în 0 este $y = x - 2$.	2p 2p 1p
1.b)	$f''(x) = -\frac{\sqrt{x^2+4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} = -\frac{4}{(x^2+4)^{3/2}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ Prin urmare, f este concavă.	4p 1p
1.c)	Pentru $k, n \in \mathbb{N}^*$, $f'(\frac{k}{n^2}) = 1 - \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{\frac{k^2}{n^4}+4}} = 1 - \frac{k}{\sqrt{4n^4+k^2}}$. Astfel, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - f'(\frac{1}{n^2}) - f'(\frac{2}{n^2}) - \dots - f'(\frac{n}{n^2})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{4n^4+k^2}}$. Pe de o parte avem $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{4n^4+k^2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{4n}$; pe de cealaltă parte, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{4n^4+k^2}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{4n^4+n^2}} = \frac{n(n+1)}{n\sqrt{4n^2+1}} = \frac{n+1}{2\sqrt{4n^2+1}}$. Cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{4n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2\sqrt{4n^2+1}} = \frac{1}{4}$, limita cerută există și este egală cu $\frac{1}{4}$.	1p 1p 1p 1p 1p
2.a)	$I_0 = \int_0^1 (x+1)^{-1/2} dx = 2(x+1)^{1/2} \Big _0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$	5p
2.b)	Avem $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}} dx = 2 \int_0^1 x^n (\sqrt{x+1})' dx$. Prin integrare prin părți, obținem: $I_n = 2x^n \sqrt{x+1} \Big _0^1 - 2n \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{x+1} dx = 2\sqrt{2} - 2n \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{x+1} dx.$ Astfel, $I_n = 2\sqrt{2} - 2n \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{2} - 2n \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{2} - 2nI_n - 2nI_{n-1}$. Prin urmare, $(2n+1)I_n + 2nI_{n-1} = 2\sqrt{2}$.	2p 2p 1p
2.c)	Pentru o funcție $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă Riemann avem $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x) dx$. Particularizând la funcția $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x \in [0, 1]$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}+1}} = I_0$, adică $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = I_0. (*)$ Folosind inegalitatea $\ln(1+x) \leq x$, avem $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$. Cum $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in [0, 1]$, avem $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\right) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+kn}$. Se arată ușor că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+kn} = 0$. Din (*) și inegalitățile de mai sus, rezultă $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\right) = I_0$. Dar $e^{\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\right)} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\right)$, de unde concluzia.	2p 1p 1p 1p