

Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(2 \pm i\sqrt{2})^2 = 2 \pm 4i\sqrt{2}$	2p
	$z = 4$	1p
	Concluzie: $Re(z) = 4, Im(z) = 0$.	2p
2.	Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (2, m - 4)$	3p
	V aparține dreptei $y = x + 1 \Rightarrow m - 4 = 3$	1p
	Concluzie: $m = 7$.	1p
3.	$x + 2 > 0$ și $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$	2p
	$\log_2(x^2 - 4) - \log_2(x + 2) = 1 \Leftrightarrow \log_2(x - 2) = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 2$	2p
	Concluzie: $x = 4$.	1p
4.	$P = \frac{f}{n}$	1p
	Mulțimea cazurilor posibile: $\{1, 3, \dots, 29\} \Rightarrow n = 15$	1.5p
	Mulțimea cazurilor favorabile: $\{1, 9, 25\} \Rightarrow f = 3$	1.5p
	Concluzie: probabilitatea cerută este $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.	1p
5.	Ecuația unei drepte prin origine: $y = mx$	2p
	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{2}$	2p
	Concluzie: $y = -\frac{1}{2}x$.	1p
6.	$\sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0$	2p
	$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	1p
	$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	1p
	Concluzie: $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}\right\}$.	1p

1.a)	$M(a)$ nu este inversabilă $\Leftrightarrow \det M(a) = 0$	2p
	$\det M(a) = 1 - 2a$	2p
	Concluzie: $a = \frac{1}{2}$	1p
b)	$M(a) \cdot M(b) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1-b \end{pmatrix}$	1p
	$M(a) \cdot M(b) = \begin{pmatrix} 1-a-b+2ab & 0 & a+b-2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ a+b-2ab & 0 & 1-a-b+2ab \end{pmatrix}$	3p
	Concluzie: $M(a) \cdot M(b) = M(a+b-2ab) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$	1p
c)	$M^2(x) = M(2x-2x^2) = \begin{pmatrix} 1-2x+2x^2 & 0 & 2x-2x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x-2x^2 & 0 & 1-2x+2x^2 \end{pmatrix}$	2p
	$M^2(x) = I_3 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$	2p
	Concluzie: $x \in \{0, 1\}.$	1p
2.a)	Restul împărțirii lui f la $(X-1)$ este $f(1)$	2p
	$f(1) = a + b + c + 3 = 4$	2p
	Concluzia: $a + b + c = 1.$	1p
b)	i este rădăcină a lui $f \Leftrightarrow f(i) = 0$	1p
	$f(i) = 0 \Leftrightarrow (b-2)i + (1-a+c) = 0 \Leftrightarrow b = 2$ și $a - c = 1$	2p
	Rezolvarea sistemului $a + b + c = 1, b = 2$ și $a - c = 1$	1p
	Concluzia: $a = 0, b = 2, c = -1.$	1p
c)	$f = X^4 + 2X^3 + 2X - 1$	1p
	$f = (X^2 + 1)(X^2 + 2X - 1)$	2p
	$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm i; x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$	2p

1.a)	f e continuă pe $(-1, +\infty) \setminus \{0\}$	1p
	$f_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} (2x^2 - 1) = -1$	1p
	$f_d(0) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -1$	1p
	$f_s(0) = f_d(0) = f(0) = -1 \Rightarrow f$ continuă în $x_0 = 0$	1p
	Concluzie: f e continuă pe $(-1, +\infty)$.	1p
b)	$f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \nearrow 0} 2x = 0$	2p
	$f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$	2p
	Concluzie: $f'_s(0) = f'_d(0) \Rightarrow f$ este derivabilă în $x_0 = 0$.	1p
c)	$\forall x \in (-1, 0) \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 1 \leq 1$	2p
	$\forall x \in [0, +\infty) \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq 1$	2p
	Concluzie $f(x) \leq 1, \forall x \in (-1, +\infty)$.	1p
2.a)	$I_2 = \int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$	1p
	$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big _0^1 + \arctg x \Big _0^1.$	3p
	Concluzie: $I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$	1p
b)	$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^{2n} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$	3p
	Concluzie: $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$	2p
c)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2 - 1)}{x^2 + 1} dx \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șir monoton descrescător	2p
	$I_n \geq 0, I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - I_n \leq \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șir mărginit	2p
	$(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ șir monoton și mărginit $\Rightarrow$ șir convergent.	1p