

Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă **10 puncte** din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = \frac{1}{(1+i\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(1-i\sqrt{2})^2} = \frac{1}{-1+2\sqrt{2}i} + \frac{1}{-1-2\sqrt{2}i}$	2p
	$z = -\frac{2}{9}$	2p
	Concluzie: $Im(z) = 0$.	1p
2.	Punctul de minim al parabolei este $V\left(-\frac{m+n}{2}, -\frac{(m+n)^2+4m}{4}\right)$	2p
	Panta dreptei trebuie sa fie nulă $\Rightarrow m = 0$	1p
	Dreapta trece prin $V\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n^2}{4}\right) \Rightarrow n^2 + 4n = 0$	1p
	Concluzie: $n = 0$ sau $n = -4$.	1p
3.	$x > 1$	1p
	$x \pm 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} \pm 1)^2 \geq 0$	1p
	Ecuția devine $ \sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x-1} + 1 + \log_2(x-1) = 0$	1p
	Caz 1. $x \in (1, 2) \Rightarrow 2 + \log_2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 5/4$	1p
	Caz 2. $x \geq 2 \Rightarrow 2 \leq 2\sqrt{x-1} + \log_2(x-1) = 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții.	1p
4.	$P = \frac{f}{n}$	1p
	Numărul cazurilor posibile: $n = 100$	1p
	Numărul cazurilor favorabile: $f = \text{card}\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\} = 7$ (justificare)	2p
	Concluzie: probabilitatea cerută este $P = \frac{7}{100}$.	1p
5.	$C(u, v) \in d \Leftrightarrow v = 5 - u$	1p
	$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ u & v & 1 \end{pmatrix} \right = 2 u-3 = 4$	2p
	Concluzie: $ u-3 = 2 \Rightarrow C(5, 0)$ sau $C(1, 4)$.	2p
6.	$\cos 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x \in \{-1/2, 1\}, x \in (0, \pi) \Rightarrow \cos x = -1/2$	2p
	$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 1$.	3p

1.a)	$A(x, y) \circ A(u, v) = A(xu - yv, xv + yu), (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \neq 0,$	1.5p
	$\forall A(x, y), A(u, v) \in G$	
	Asociativitatea operației " $\circ$ "	1p
	Comutativitatea operației " $\circ$ "	0.5p
	Elementul neutru al operației " $\circ$ " este $A(1, 0)$	1p
	$\forall A(x, y) \in G, A(x, y)^{-1} = A\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \in G.$	1p
b)	φ este morfism: $\varphi((x + iy) \cdot (u + iv)) = \varphi(x + iy) \circ \varphi(u + iv), \forall (x + iy), (u + iv) \in \mathbb{C}^*$	3p
	φ este bijecție	2p
c)	$A(0, -1) = \varphi(i)$	2p
	$A(0, -1)^{2017} = \varphi(i^{2017}) = \varphi(i)$	2p
	Concluzie: $A(0, -1)^{2017} = A(0, -1).$	1p
2.a)	f se divide prin $X - \widehat{2} \Leftrightarrow f(\widehat{2}) = \widehat{0}$	2p
	$f(\widehat{2}) = p$	2p
	Concluzia: $p = \widehat{0}.$	1p
b)	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$	1p
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$	1p
	$x_1 + x_2 + x_3 = -p$	1p
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \widehat{0}$	1p
	Concluzia: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p^3.$	1p
c)	$f(\widehat{1}) = \widehat{0}$	1p
	$f = (X - \widehat{1}) \cdot g, g = X^2 + \widehat{2}X + \widehat{2}$	2p
	g este ireductibil în $\mathbb{Z}_3.$	2p

1.a)	$f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1), \forall x > 0$	1p
	$f'(x) > 0, \forall x > 0$	1p
	f strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$	1p
	$\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$	1p
	$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$	1p
b)	$g'(x) = \frac{(2x^2 - 1)e^{x^2} - x^2 + 1}{x^2}, \forall x > 0$	1p
	$h(t) = (2t - 1)e^t - t + 1, \forall t \geq 0, h(0) = 0$	1p
	$h'(t) = 2te^t + e^t - 1 > 0, \forall t > 0$	1p
	h strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow h(t) > 0, \forall t > 0$	1p
	$g'(x) = h(x^2)/x^2 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow g$ este crescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$.	1p
c)	$\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n$ între x_{n-1} și x_n astfel ca $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(c_n)(x_n - x_{n-1})$	1p
	$f'(c_n) > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \operatorname{sgn}(x_n - x_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$	1p
	$x_1 = e^4 - 5 > 2 = x_0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$	1p
	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir crescător $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in (2, \infty]$	1p
	$l < \infty \Rightarrow 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = g(l) > g(2) > 1$, absurd. Concluzie $l = \infty$.	1p
2.a)	$\int f(x) dx = \int 2x \sin^2 x dx = \int x(1 - \cos 2x) dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} (\sin 2x)' dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \sin 2x +$ $+ \int \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{\cos 2x}{4}$	3p
	$\int f(x) + g(x) dx = x^2 \Rightarrow \int g(x) dx = x^2 - \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{\cos 2x}{4}$.	2p
b)	$I_n = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{\cos 2x}{4} \right) \Big _0^{1/n} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n} \sin \frac{2}{n} - \frac{1}{4} \cos \frac{2}{n} + \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	2p
	$J_n = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} \right) \Big _0^{1/n} = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n} \sin \frac{2}{n} + \frac{1}{4} \cos \frac{2}{n} - \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	2p
	$I_n + J_n = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	1p
c)	$n^2(J_n - I_n) = n \sin \frac{2}{n} + \frac{n^2}{2} \left(\cos \frac{2}{n} - 1 \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$	1p
	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{2}{n} = 2$	1p
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2} \left(\cos \frac{2}{n} - 1 \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \frac{1}{n} = -1$	2p
	Concluzia: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(J_n - I_n) = 1$.	1p